

假设最后所求的直线为 $y = kx + b$ ，那么最后要求最小化的距离为

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{(kx_i - y_i + b)^2}{k^2 + 1}$$

展开，得到

$$\delta = \frac{k^2 \sum x_i^2 - 2k \sum x_i y_i + 2bk \sum x_i + \sum y_i^2 - 2b \sum y_i + nb^2}{k^2 + 1}$$

其中所有 \sum 项都是常数。假设 k 是一个固定的值，可以将原式转化为

$$\delta = \frac{nb^2 + (2k \sum x_i - 2 \sum y_i)b + k^2 \sum x_i^2 - 2k \sum x_i y_i + \sum y_i^2}{k^2 + 1}$$

要使 δ 最小，那么有

$$b = \bar{y} - k\bar{x}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

接下来再考虑 k ，将上式整理得

$$\delta = \frac{(\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2)k^2 + (2\bar{y} \sum x_i + 2\bar{x} \sum y_i - 2 \sum x_i y_i - 2n\bar{x}\bar{y})k + \sum y_i^2 - 2\bar{y} \sum y_i + n\bar{y}^2}{k^2 + 1}$$

设

$$\begin{aligned} A &= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2 \\ B &= 2\bar{y} \sum x_i + 2\bar{x} \sum y_i - 2 \sum x_i y_i - 2n\bar{x}\bar{y} \\ C &= \sum y_i^2 - 2\bar{y} \sum y_i + n\bar{y}^2 \end{aligned}$$

原式转化为

$$\delta = \frac{Ak^2 + Bk + C}{k^2 + 1}$$

得到

$$(A - \delta)k^2 + Bk + C - \delta = 0$$

这条式子的

$$\Delta = B^2 - 4(A - \delta)(C - \delta)$$

当 $\Delta = 0$ 时， δ 取到最小值（ δ 有两个值，取较小的）。

所以我们只需要维护 $\sum x_i$ 、 $\sum y_i$ 、 $\sum x_i y_i$ 、 $\sum x_i^2$ 、 $\sum y_i^2$ ，求解时直接输出即可。